RAMSEY FRANK PLUMPTON

Abstrakt:
Frank Plumpton Ramsey byl prvním neoklasickým ekonomem, který se zabýval dlouhodobým ekonomickým růstem. V roce 1927 ve svém článku *Matematická teorie úspor* vytvořil matematický model, ve kterém určil velikost úrokové míry tak, aby došlo k dosažení maximálního možného užitku a současně aby maximalizoval užitek jedinců žijících před dosažením této úrovně. O rok později vydal článek *Příspěvek k teorii daní*, kde odvodil pravidlo, podle kterého by měla být míra zdanění nepřímo úměrná elasticitě poptávky po konkrétní komoditě. Tím by docházelo k minimální deformaci trhů zdaněním. Toto pravidlo však naráží na značné politické překážky, proto nebylo téměř nikdy uvedeno do praxe. Ramsey se kromě ekonomie věnoval filosofii a matematice. Zemřel předčasně ve svých 26 letech.

Klíčová slova:
Daně, cenová elasticita, užitek, úspory, úroková míra, ekonomický růst
Key words:
Taxes, price elasticity, utility, savings, rate of interests, economic growth
Names:
Keynes J. M., Robinsonová J., George H., Samuelson P. A.

Biografie

Frank Plumpton Ramsey se narodil 22. února 1903. V roce 1915 nastoupil na Winchester College a později studoval matematiku na Trinity College. V roce 1925 se oženil a měl dvě dcery.
Díky podpoře J. M. Keynese se stal členem King's College v Cambridge. O dva roky později začal vyučovat matematiku a později se stal vedoucím katedry matematiky.
V roce 1927 vyšla v *Economic Journal* jeho esej *Matematická teorie úspor*, která představuje první model dlouhodobého ekonomického růstu v neoklasické ekonomii. O rok později byla publikována další jeho esej *Příspěvek k teorii daní*.
Kromě ekonomie Ramsey svým dílem zasahoval do matematiky a filosofie.
Ramsey zemřel v pouhých 26 letech na nemoc jater.

Matematická teorie úspor

John Maynard Keynes v roce 1933 Ramseyho článek popsal jako jeden z nejpozoruhodnějších přínosů k matematické ekonomii, který kdy kdo učinil. Označuje jej sice za velice špatně čitelný pro ekonoma, současně ale vyzdvihuje eleganci a vědecký přístup. Článek byl jedním z velmi mála pojednání neoklasické ekonomie o dlouhodobém ekonomickém růstu.
V první části eseje *Matematická teorie úspor* se Ramsey zaměřuje na vyřešení problému velikosti úspor určitého státu, které by vedlo k dosažení maximálního užitku.
Pro jeho vytvoření zavádí několik předpokladů. Prvním z nich je, že v čase se nemění velikost populace, velikost užitku, který daná populace

vyžaduje a funkce velikosti záporného užitku z práce. Případné změny by poté musely být do výpočtu explicitně přidány. V první fázi své úvahy také předpokládá, že není rozlišováno mezi užitkem současným a budoucím.

Zanedbává také problém distribuce, rozdíly mezi jednotlivými druhy zboží a práce, a předpokládá jejich vyjádření v určité veličině. Můžeme tak mluvit o číselně daném množství kapitálu, spotřeby a práce.

Nevylučuje zahraniční obchod, nicméně je vyloučena možnost progresivního zadlužování konkrétního státu donekonečna. Posledním předpokladem je, že všechny následující generace se budou držet stanoveného pravidla a nashromážděný kapitál tedy nebude jednou z generací spotřebován.

Pokud rozložíme příjem společnosti mezi investice do kapitálu a do spotřeby, lze jeho velikost vyjádřit funkcí:

$$\frac{dc}{dt} + x = f(a, c) \qquad (1)$$

kde $c(t)$ - množství kapitálu v čase t

$x(t)$ - velikost spotřeby v čase t

$a(t)$ - množství práce v čase t

Dále označil $U(x)$ jako velikost celkového užitu ze spotřeby x a $V(a)$ celkovou velikost záporného užitku z práce a. Pomocí derivace pak vyjádřil i mezní užitek ze spotřeby jako $u(x)$ a mezní záporný užitek z práce jako $v(a)$. Předpokládal, že je $u(x)$ neostře klesající a $v(a)$ neostře rostoucí funkcí.

Čistý užitek v určitém čase lze vyjádřit rozdílem $U(x) - V(a)$. Velikost tohoto rozdílu je závislá na množství kapitálu v konkrétním čase (větší množství kapitálu zaručuje větší čistý užitek a naopak).

Růst čistého užitku může být ukončen ve dvou případech. Buď zvýšení množství kapitálu již nebude schopno zajistit růst příjmů nebo množství volného času obyvatel, nebo dosáhneme maximální možné velikosti užitku.

Velikost užitku se totiž může zvyšovat donekonečna, nebo může konvergovat ke konečnému supremu. Ramsey předpokládal, že velikost užitku, dosažitelného čistě z ekonomických příčin, je konečné číslo. Tato míra však nemusí být totožná s maximální představitelnou mírou štěstí, jde o maximální dosažitelnou velikost užitku.

Tuto velikost užitku označil B (od slova *Bliss*). Ve všech případech musí být úspory společnosti dostatečné k tomu, aby velikost užitku v konkrétním čase dosáhla úrovně B (nebo k němu konvergovala).

Rozdíl maximálního dosažitelného užitku a čistého užitku v čase Ramsey integruje podle t.

$$\int_{c_0}^{\infty} \left(B - U(x) + V(a)\right) dt$$

kde c_0 - množství kapitálu v počátečním čase

B - maximální dosažitelná velikost užitku

$U(x)$ - velikost celkového užitku ze spotřeby v čase t

$V(a)$ - velikost celkového záporného užitku z práce v čase t

Pro zjednodušení výpočtu Ramsey změnil integrační proměnnou na c a dosazením dle vztahu (1) získal následující funkci.

$$\int_{c_0}^{\infty} \frac{\left(B - U(x) + V(a)\right)}{\frac{dc}{dt}} dc = \int_{c_0}^{\infty} \frac{\left(B - U(x) + V(a)\right)}{f(a,c) - x} dc$$

kde všechna označení se drží předchozích

Funkce x a a jsou závislé na c. Pro minimalizaci integrantu položil jeho parciální derivace rovny nule. Úpravou získané rovnosti Ramsey získal následující rovnost:

$$\frac{dc}{dt} = f(a,c) - x = \frac{B - (U(x) - V(a))}{u(x)} \qquad (2)$$

kde všechna označení se drží předchozích

Nyní mu již zbývala jednoduchá úprava rovnosti k získání hledaného pravidla.

$$\{f(a,c) - x\} * u(x) = B - (U(x) - V(a))$$

kde všechna označení se drží předchozích

Tedy míra úspor násobená mezním užitkem ze spotřeby by se měla rovnat rozdílu maximální a současné míry celkového užitku.

Zajímavostí Ramseyho pravidla je, že je nezávislé na konkrétní produkční funkci dané ekonomiky.

Ramsey ve svém článku uvádí ještě další postup získání tohoto pravidla, a to derivací produkční funkce. Obě získané rovnosti jsou však ekvivalentní. Postup odvození Ramsey konzultoval s J. M. Keynesem, který jeho úpravy potvrdil logickou dedukcí téhož vztahu. Ta však sama o sobě nezaručuje získání obecného pravidla.

V druhé části eseje se Ramsey zaměřil na problém konkrétních osob a na analýzu období o konečné délce.

Zavedl označení výnosů z práce a kapitálu

$$f(a,c) = pa + rc$$

kde: *p* – velikost mezd
r – úroková míra
a – množství práce
c – množství kapitálu

Příjem společnosti je rozdělen mezi dvě části – *pa* a *rc*, tedy mzdy a úroky.

Pro záporný mezní užitek z práce platí následující vztah:

$$v(a) = pu(x)$$

kde *v(a)* - mezní záporný užitek z práce
p - velikost mezd
u(x) - mezní užitek ze spotřeby

Dále Ramsey zavedl proměnnou *y*, která vyjadřuje rozdíl spotřeby a příjmu z mezd, tedy

$$y = x - pa$$

Definoval mezní a celkový užitek z příjmu z úroků, které představují užitky z vlastnictví příjmů z úroků *y* a jsou k dispozici ke spotřebě.

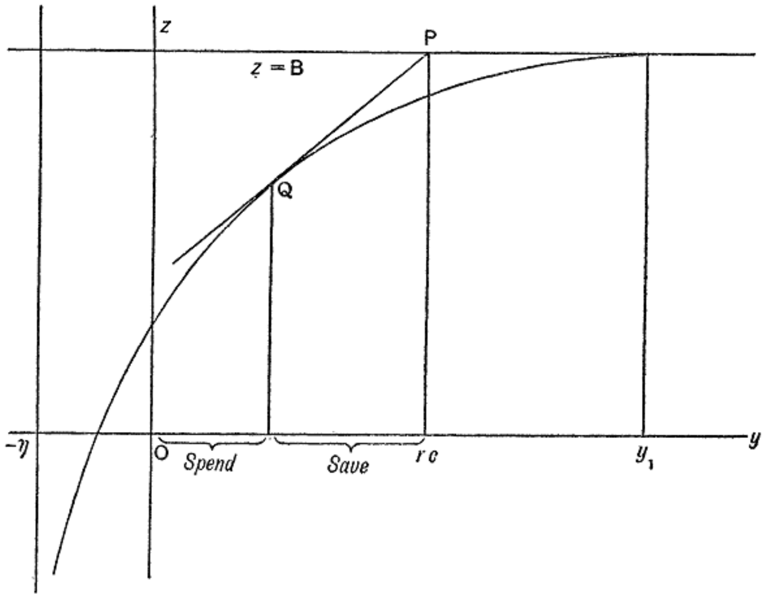
$$w(y) = u(x) = \frac{v(a)}{p}$$

kde *w(y)* - mezní užitek z příjmu z úroků
ostatní označení zůstávají stejná

$$z = W(y) = \int w(y)dy = \int (u(x)dx - v(a)da) = U(x) - V(a)$$

kde *W(y)* - celkový užitek z příjmu z úroků
ostatní označení zůstávají stejná

Grafické znázornění tohoto problému, které Ramsey uveřejnil ve svém článku, vypadá takto:



Na horizontální osu umístil Ramsey proměnnou *y* a na vertikální osu množství celkového užitku z příjmu z úspor, kterou označil jako *z* (platí tedy, že $z = W(y)$). Současně Ramsey zanesl na vertikální osu bod určující velikost užitku *B*. Jelikož tato velikost je konstantní pro všechny hodnoty *y*, Ramsey do grafu zakreslil přímku $z = B$ rovnoběžnou s osou *y*, která vyjadřuje dosažení maximálního možného užitku.

Pro další Ramseyho postup bylo potřeba určit bod *P*, ležící na přímce $z = B$. Souřadnice bodu tedy můžeme vyjádřit. Následující vztah, odvozený ze vztahu (2), nám určuje, že *P* bude ležet na tečně křivky *W(y)*.

$$rc - y = f(a, c) - x = \frac{B - W(y)}{w(y)}$$

kde všechna označení se drží předchozích

Ramsey načrtl přímku procházející bodem *P*, která je tečnou funkce *W(y)*, a současně není rovnoběžná s přímkou *z*. Tečný bod označil *Q*. Díky tomu lze určit přesně část z příjmu z úroku určenou ke spotřebě a část určenou k dalším úsporám.

Souřadnice bodu *Q* na ose *y* udává velikost části úroku, který by měl být spotřebován, a rozdíl $rc - y$ zbývající část úroku určenou k uspoření. Pokud je souřadnice *y* záporná, znamená to uspoření celého úroku a současně části mzdového příjmu.

Tečna k funkci *W(y)* musí existovat vždy, protože křivka $z = W(y)$ bude mít tečnu nebo asymptotu $y = -\eta$

kde $-\eta$ je nejvyšší možný převis příjmů nad spotřebou tak, aby spotřeba byla na hranici existenčního minima.

Ramsey dokázal určit i čas potřebný k dosažení hodnoty užitku *B*. Tento čas je identický času potřebnému k naspoření kapitálu *c*. Ramsey nejprve vyjádřil sumu příjmu po určitém čase *t* a po úpravě získal rovnici určující velikost mezního užitku z příjmu z úspor.

$$w(y) = Ae^{-rt} = w(y_0)e^{-rt}$$

kde *A* – konstanta rovna $w(y_0)$

y_0 – hodnota y *v* čase 0 (tj. souřadnice bodu *Q* pro bod *P* o souřadnicích [rc_0, *B*]

c_0 – počáteční množství kapitálu

všechna ostatní označení se drží předchozích

Pro určení času potřebného k uspoření kapitálu c z počáteční hodnoty kapitálu c_0, uvažoval bod P o souřadnicích [r_c, B] a P_0 o souřadnicích [rc_0, B]. $w(y)$ je sklon tečny procházející P a $w(y_0)$ je sklon křivky procházející P_0. Potřebný čas lze tedy vyjádřit ze vztahu

$$t = \frac{1}{r} log_e \frac{w(y_0)}{w(y)}$$

V poslední části článku se Ramsey věnuje určení velikosti úrokové míry. Nejprve se věnuje nejjednoduššímu případu, kdy všichni členové společnosti znevýhodňují příjem v budoucnosti oproti současnému příjmu mírou ρ.

Ve stavu rovnováhy zde nebudou žádné úspory a bude platit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dc}{dt} = 0$$

kde všechna označení se drží předchozích

Dále Ramsey odvodil následující vztah

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \rho$$

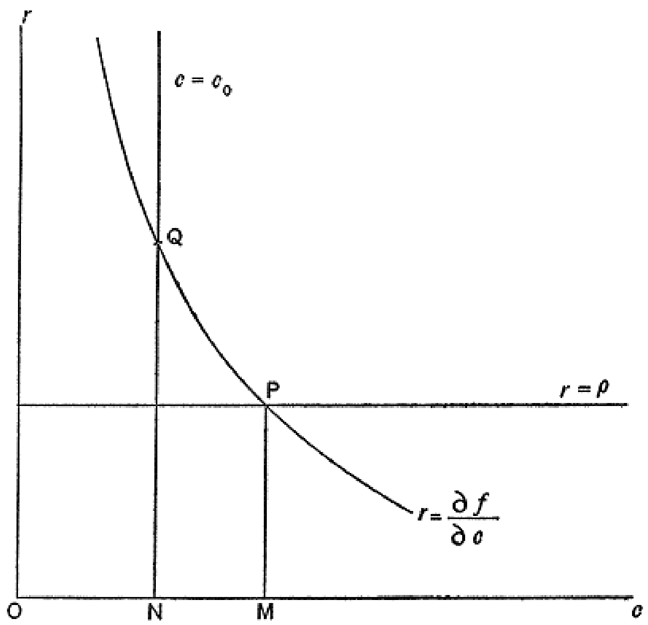
Tedy že úroková míra, která je určená mezní produktivitou kapitálu, musí být rovna znevýhodnění ρ.

V konkrétním čase během lidského života však platí $\frac{\partial f}{\partial c} > ro$. V takovém čase jsme ještě nedosáhli optimální velikosti úspor.

K dalšímu postupu Ramsey opět použil dvourozměrný graf. Do něj zakreslil křivku poptávky po kapitálu $r = \frac{\partial f}{\partial c}$, přímku označující dlouhodobou nabídku kapitálu ρ a krátkodobou nabídku kapitálu $c = c_0$.

Úroková míra je určena průsečíkem poptávkové křivky s krátkodobou nabídkou kapitálu $c = c_0$. Křivku dlouhodobé nabídky $r = \rho$ získáme určením míry, při které c_0 konverguje k OM. Tato míra závisí na poměru PM a QN. Úroková míra je tedy řízená primárně poptávkovou cenou a může převyšovat přínos nezbytně nutný k odložení spotřeby. Ve zbytku článku Ramsey navazuje na toto pravidlo a pracuje bez předchozích předpokladů.

Ramseyho znázornění problému se nachází na následujícím obrázku:



Matematická teorie zdanění

V článku *Příspěvek k teorii daní* hledá Ramsey odpověď na následující problém: Jestliže příjmy státu je potřeba zvýšit zvýšením daňových sazeb, jak upravit daňové sazby tak, aby docházelo k minimálnímu snížení celkového užitku?

Ramsey navázal na myšlenky Henryho George, který vyzval k financování státního rozpočtu výběrem daní pouze z půdy, a nikoli z daní z práce či kapitálu. Henry George tvrdil, že taková daň by zlepšila rozdělení důchodu bez nákladů snížené produktivity ekonomiky.

Ramseyho pravidlo shrnul Paul Samuelson následovně:

„*Moderní teorie efektivního zdanění navrhuje* Ramseyho pravidlo, *podle kterého by vláda měla nejvíce zdanit ty vstupy a výstupy, u kterých je nabídka či poptávka nejméně cenově elastická. Myšlenka Ramseyho pravidla zdanění spočívá v tom, že pokud je poptávka či nabídka komodity velice cenově neelastická, daň bude mít na spotřebu a výrobu jen malý vliv. Za určitých okolností mohou Ramseyho daně znamenat cestu ke zvýšení výnosů s pouze minimální ztrátou ekonomické efektivity.*“ (Samuelson, Nordhaus 2005/2007, s. 335)

I když se v literatuře uvádí většinou pouze slovní formulace Ramseyho pravidla, Ramsey jej odvodil důsledným matematickým postupem, stejně jako tomu bylo ve článku *Matematická teorie úspor*.

Ramseyho teorie se dá použít i pro určení cen monopolního výrobce. Tato aplikace navíc může být průchodnější a aplikovatelnější v praxi, neboť nenaráží na tak tvrdé bariéry, jako aplikace teorie na výši daní (tyto bariéry jsou popsány dále). Autorem této aplikace je J. Robinsonová.

Aplikace Ramseyho teorie na chování monopolního výrobce je matematicky odvozena následujícím postupem. Uvažujme, že ceny výrobků monopolistického výrobce jsou prvky vektorového pole $[p_1 \ldots p_n]$. Náklady na výrobu výrobku jsou definovány ve vektorovém poli $C[z_1 \ldots z_n] = C[z]$. Hodnoty z_1 až z_n představují množství produkce každého z n zboží. Je předpokládáno, že poptávky po zboží jsou vzájemně nezávislé. Poptávka po zboží n je funkcí ceny p_n zboží n, tedy lze ji vyjádřit $z_n(p_n)$.

Celkový příjem monopolní firmy lze vyjádřit vztahem:

$$R(p,z) = \sum_n p_n z_n(p_n)$$

Zisk lze vyjádřit:

$$W(p,z) = \sum_n (\int_0^{z_n(p_n)} p_n(z)) - C(z)$$

Nyní je problémem maximalizace zisku, který poté dosáhne konkrétní konečné úrovně π^*.

Zisk je samozřejmě rozdílem mezi příjmy a náklady.

K řešení vztahu lze využít metodu Lagrangeových multiplikátorů.

$$p_n - C_n(z) = \lambda(\frac{\partial R}{\partial z_n} - C_{n(z)}) = \lambda(p_n\left(1 + \frac{z_n}{p_n}\frac{\partial p_n}{\partial z_n}\right) - C_n(z))$$

kde λ - Lagrangeův operátor

C_n - parciální derivací $C(z)$ podle příslušného z_n

Elasticitu poptávky po zboží lze vyjádřit následujícím vztahem:

$$\varepsilon_n = -\frac{\partial z_n}{\partial p_n}\frac{p_n}{z_n}$$

kde ε_n – elasticita poptávky

Úpravou lze získat následující vztah:

$$\frac{p_n - C_n(z)}{p_n} = \frac{k}{\varepsilon_n}$$

kde k je konstantou a $k = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ a současně $k < 1$

V závěru svého článku formuloval Ramsey několik konkrétních příkladů aplikace jeho teorie:
Jestliže je komodita produkována na několika různých místech a z několika různých zdrojů bez možnosti přesunu těchto zdrojů z jednoho místa na jiná, nejvýhodnější by bylo daňově rozlišovat komodity dle místa výroby a nejvíce zdanit místo produkce, odkud pochází komodita s nejméně elastickou poptávkou. Je však nutný stálý poměr produkce mezi každými dvěma výrobními místy.
Jestliže je několik komodit, jejichž poptávkové křivky jsou vzájemně nezávislé a jsou produkovány z totožných zdrojů, největší daňovou sazbou by měl být zatížen produkt, který má nejméně elastickou poptávku.
Při zdanění substitutů nebo komplementů by se daně neměly lišit od poměru, ve kterém jsou substituty nebo komplementy poptávány.
Při zdanění motorových vozidel by měl být brán ohled na poškození vozovek jimi způsobená. Dále je třeba zdanit i palivo motorových vozidel. Při rozdělení zdanění se Ramsey řídil předcházejícím bodem a navrhnul rozdělit daně na část na motorová vozidla a část na paliva a udržovat poměr, ve které jsou oba statky poptávány. Cílem je dosáhnout rovnoměrného snížení poptávky po obou statcích.
Problém je, že Ramseyho přístup se často dostává do sporu s politickou administrativou jednotlivých států.
„Avšak ekonomové a politici se nestarají jen o efektivitu. I když tvrdé zdanění pozemkových rent či potravin může být efektivní, řada lidí jej bude považovat za nespravedlivé. Vzpomeňme na návrh zavedení volební daně v Británii 1990. Volební daň je daní z hlavy neboli fixní daní na osobu. Výhoda této daně spočívá v tom, že stejně jako pozemková daň nevede k neefektivitám. … Britská vláda však ke své smůle podcenila, že veřejnost může tuto daň vnímat jako nespravedlnost. Volební daň je silně degresivní, protože uvalí mnohem větší poměrné břemeno na lidi s menšími příjmy. Kritika volební daně sehrála hlavní úlohu při svržení vlády Thatcherové po 11 letech u moci. To je zřejmým potvrzením toho, že volba mezi efektivitou a spravedlností v daních i dalších oblastech hospodářské politiky není nic lehkého.“ (Samuelson, Nordhaus 2005/2007, s. 335)

Použitá literatura:

RAMSEY F.P. (1927), *A Contribution to the Theory of Taxation*. Economic Journal, Vol. 37, No 145, pp. 47–61 [on-line]. URL:
http://www.jstor.org/stable/2222721?&Search=yes&term=ramsey&list=hide&searchUri=%2Faction%2FdoAdvancedSearch%3Fq0%3Dramsey%26f0%3Dau%26c0%3DAND%26q1%3D%26f1%3Dall%26c1%3DAND%26q2%3D%26f2%3Dall%26c2%3DAND%26q3%3D%26f3%3Dall%26wc%3Don%26Search%3DSearch%26sd%3D%26ed%3D%26la%3D%26jo%3D&item=20&ttl=363&returnArticleService=showArticle

RAMSEY F.P. (1928), *A Mathematical Theory of Saving.* Economic Journal, Vol. 38, No 152, pp. 543 559 [on-line]. URL: http://www.jstor.org/sici?sici=0013-0133(192812)38%3A152%3C543%3AAMTOS%3E2.0.CO%3B2-R&origin=crossref

SAMUELSON P. A., NORDHAUS W. D. (2005): *Ekonomie (18. vydání).* Nakladatelství Svoboda, Praha, 2007; Orig.: *Economics, eigthteeth Edition*

Wikipedia, *The Free Encyclopedia* [online]. Frank Plumptom Ramsey. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Frank_P._Ramsey

Wikipedia, *The Free Encyclopedia* [online]. Ramsey Problem. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_pricing

10. května 2009
Jiří Pešík
2. ročník, K07500