

## Analýza nesplacených pohledávek pomocí Markovových řetězců – případová studie

Ladislav Lukáš, Jiří Hofman

### ÚVOD

Finanční management, a především řízení finančních toků, hraje stěžejní roli v existenci každého podniku. Jsou to především pohledávky, které představují dominantní složku příjmových finančních toků u většiny podniků. Důležitou složkou každé pohledávky je jasné stanovení platebních podmínek a především termínů splatnosti. V reálném světě dodavatelsko-odběratelských vztahů však je nutné připustit, že platby pohledávek, a zejména plnění stanovených termínů splatnosti, mohou vést ke značným finančním problémům, a tak představují nezanedbatelný rizikový faktor v podnikání. Úkolem finančního managementu je tyto rizikové faktory co nejpodrobněji sledovat a analyzovat. Jde o celý komplex otázek a úkolů. Jedním z nejdůležitějších je odhad a včasná tvorba odpovídajících finančních rezerv podniku pro pokrytí nesplacených pohledávek, které je podnik nucen odepisovat jako nedobytné pohledávky. V praxi existuje celá řada různých metod jak tyto procesy sledovat, analyzovat a i odhadovat případné následky. Jednou z nich je analýza nesplacených pohledávek podniku pomocí Markovových řetězců.

### 1. ABSORPČNÍ MARKOVŮV ŘETĚZEC

Obecný postup využití absorpčních Markovových řetězců pro analýzu nesplacených pohledávek je dobře znám. Bývá dokonce často zařazen do kvalitních učebnic operačního výzkumu či kvantitativních metod v ekonomii, a to právě do kapitol zaměřených na teorii a použití Markovových řetězců – např. Anderson, Sweeney & Williams, (1998); Render, Stair & Hanna (2003) a též Lukáš (2009). Podrobnější aspekty teorie Markovových řetězců jakožto diskrétních náhodných posloupností splňujících Markovovu

vlastnost jsou v Yin & Zhang (2005). Rizika a souvislosti mezi nesplacenými pohledávkami a finančním poddimenzováním jsou analyzovány v Sopranzetti (1999). Problematika nesplacených pohledávek v rámci dodavatelsko-oběratelských vztahů je diskutována v Garmichael & Balatbat (2010). Obecný pohled na analytickou strukturu fundamentální matice absorpčního Markovova řetězce používaného při analýzách nesplacených pohledávek je v Hofman & Lukáš (2014), a to včetně diskuse o citlivosti této matice na podmíněných pravděpodobnostech splacení.

Jak známo, Markovův řetězec (zkráceně MŘ) je diskrétní náhodná posloupnost, u které výskyt stavu v bezprostřední následné budoucnosti závisí jen na stavu, ve které se tato posloupnost nachází. Číselně je tento přechod ze současného stavu do budoucího vyjádřen podmíněnou pravděpodobností přechodu. Obecně tato podmíněná pravděpodobnost může záviset na počtu kroků, které byly vykonány od počátku – pak se takový MŘ nazývá nehomogenní. V případě, že zmíněná podmíněná pravděpodobnost nezávisí na počtu provedených kroků – jde o tzv. homogenní MŘ. Matice podmíněných pravděpodobností přechodů  $P$  takového MŘ má tvar

$$P = [p_{ij}], \quad p_{ij} = P(s(k)=j | s(k-1)=i), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

kde  $n$  udává celkový počet stavů, ve kterém se MŘ může vyskytnout,  $k$  vyjadřuje počet kroků,  $s(0)$  označuje stav, ve kterém se MŘ nachází na počátku,  $s(k-1)=i$  vyjadřuje, že ve stávajícím okamžiku, či kroku, je MŘ ve stavu  $i$ , zatímco v následujícím okamžiku, tedy v  $k$ -tém kroku, bude ve stavu  $s(k)=j$ .

Absorpční MŘ, jak známo z teorie, obsahuje jen tzv. transientní a absorpční stavy. Transientním stavem se nazývá takový stav, do kterého po

provedení jistého konečného počtu kroků se již nelze vrátit, tj. pravděpodobnost takového návratu je nulová, čili jde o jev nemožný. Naopak, absorpční stav, řekněme třeba  $m$ , je charakterizován podmínkou  $p_{mm} = 1$ , která vyjadřuje skutečnost, že pokud se MŘ do takového stavu dostane, zůstane v něm natrvalo, čili jde o jev jistý. Samozřejmě je nutné, aby existoval jiný stav, pochopitelně transientní, řekněme  $i$ , ze kterého lze do absorpčního stavu  $m$  přejít, tzn.  $p_{im} > 0$ .

Matice podmíněných pravděpodobností přechodů  $\mathbf{P}$  absorpčního MŘ má kanonický tvar (2) s pevnou strukturou submatic, do které lze převést libovolný absorpční MŘ vhodnou permutací stavů

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

kde matice  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{I}$ , rozměrů  $s \times s$ ,  $s \times (n-s)$ , respektive  $(n-s) \times (n-s)$ , jsou matice podmíněných pravděpodobností přechodů, a to  $\mathbf{Q}$  jen mezi transientními stavy navzájem,  $\mathbf{R}$  z transientních stavů do absorpčních, a  $\mathbf{I}$ , což je jednotková matice, mezi absorpčními stavy. Samozřejmě, přechody z absorpčních stavů do transientních jsou nemožné, což je vystíženo nulovou maticí  $\mathbf{0}$  rozměru  $(n-s) \times s$ . Celkový počet stavů je  $n$ , z toho transientních je  $s$ , a absorpčních  $n-s$ .

Nejdůležitějším pojmem v teorii absorpčních MŘ je tzv. fundamentální matice (3)

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n, \quad (3)$$

která vyjadřuje očekávání, tj. střední hodnotu, kolikrát se proces modelovaný zvoleným absorpčním MŘ ocitne v transientním stavu  $j$ , když na počátku vyšel z transientního stavu  $i$ , při uvažování neomezeného počtu kroků vývoje procesu.

Pro naše potřeby je důležitý ještě i vztah (4), který umožňuje spočítat očekávané objemy jisté veličiny v absorpčních stavech vyjádřené vektorem  $\mathbf{y}$ , známe-li její odpovídající objemy v transientních stavech vyjádřené vektorem  $\mathbf{t}$ , když samozřejmě platí, že celkové objemové bilance uvažované veličiny ve všech transientních stavech na straně jedné, a všech

absorpčních stavech na straně druhé, si jsou navzájem rovny.

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{t}^T \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{N} \mathbf{R}, \quad \sum_{k=1}^{n-s} y_k = \sum_{i=1}^s t_i \quad (4)$$

## 2. STRUKTURA DATABÁZE PRO ANALÝZU NESPLACENÝCH POHLEDÁVEK

Pro zpracování analýzy nesplacených pohledávek podniku je vhodné vytvořit z obvyklých účetních záznamů samostatnou problémově-orientovanou databázi. To lze provést buď pomocí tzv. Report generátoru v rámci používaného účetního software, nebo třeba pomocí vytvořené Java aplikace, která filtruje příslušné účetní záznamy tak, aby z nich extrahovala právě potřebná data.

Struktura takové problémově-orientované databáze je vlastně jednoduchá. Můžeme jí množinově zapsat následovně

$$D_0 = \{m_k, {}_a d_k, {}_p d_k\}, \quad k=1, \dots, K \quad (5a)$$

kde  $m_k$  udává výši pohledávky v Kč,  ${}_a d_k$  a  ${}_p d_k$  představují důležité časové údaje, a sice termín splatnosti pohledávky, respektive skutečný okamžik platby, a konečně  $K$  udává celkový počet vyfiltrovaných záznamů. Pro vlastní podklady, které již přímo používáme k výpočtům pomocí sestaveného programu v sw Mathematica,  $D_0$  ještě transformujeme na  $D_1$  s ještě jednodušší strukturou

$$D_1 = \{m_k, \delta_k\}, \quad k=1, \dots, K, \quad \delta_k = |{}_p d_k - {}_a d_k|_t \quad (5b)$$

kde veličina  $\delta_k$  vyjadřuje zpoždění platby pohledávky oproti termínu splatnosti ve dnech, což je formálně vyjádřeno jako „časová vzdálenost“ mezi okamžiky  ${}_p d_k$  a  ${}_a d_k$  s indexem  $t$  zdůrazňujícím, že zde měříme podle času (time), jmenovitě podle kalendáře

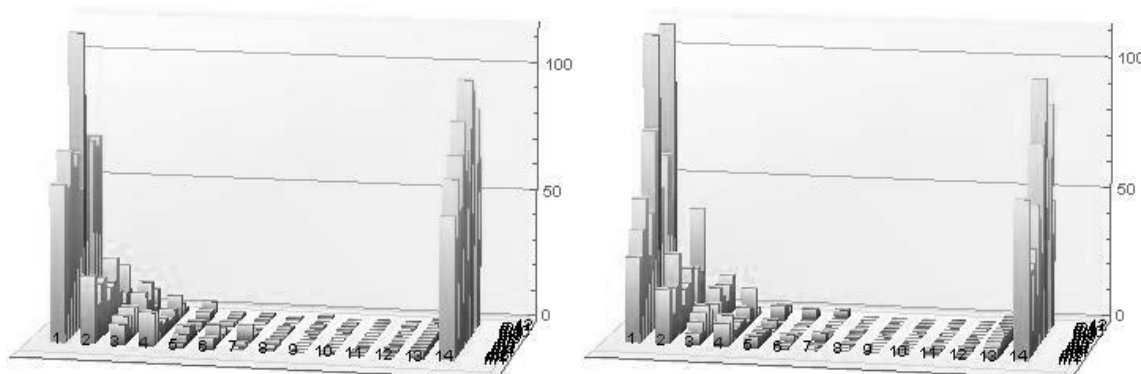
Pomocí  $D_1$  lze získat různé časové řady, a tak může sloužit pro různé přístupy k analýze nesplacených pohledávek. Pokud se rozhodneme provést takovou analýzu s použitím aparátu absorpčních MŘ potřebujeme ještě nadefinovat množinu stavů. Absorpční stavy jsou jasné – buď váznoucí pohledávka po době splatnosti bude po nějaké době zaplácena, a tím finanční vztah vyrovnán, nebo se váznoucí pohledávka stane

nedobytnou a přejde ve ztrátu. Takže uvažujeme právě dva absorpční stavy – pohledávky splacené a nesplacené. Volba transienčních stavů je mnohem volnější. Především mají vystihnout jisté časové intervaly, do kterých lze časová data z  $D_1$  roztřídit, a dále jejich počet vlastně vystihuje finanční trpělivost věřitele vůči dlužníkům při splácení váznoucích pohledávek po termínu jejich splatnosti. Lze zvolit týden, případně i den, ale obvykle se za vhodný časový interval považuje měsíc, přesněji  $\Delta = 30$  dní.

Pro případovou studii analýzy nesplacených pohledávek jsme zvolili podnik kategorie MSP

v Západočeském kraji, od něhož jsme získali potřebná data o jeho všech váznoucích pohledávkách za rok 2011, což byl podklad pro sestavení problémově-orientované databáze  $D_1$ . Pro roztřídění dat jsme použili délku časového intervalu  $\Delta = 30$ , čímž jsme zároveň jasně zvolili časovou charakteristiku transienčních stavů, s tím, že první sledované záznamy o váznoucích pohledávkách pocházely již z prosince 2010. Sledovali jsme dvě veličiny – jednak počty váznoucích pohledávek, a jednak finanční objemy těchto pohledávek po termínu jejich splatnosti. Získané výsledky jsou na Obr. 1.

**Obr. 1: Váznoucí pohledávky v r. 2011 – počty (vlevo), finanční objemy v  $10^5$  Kč (vpravo)**



*Zdroj: vlastní výpočet*

Řádky odpovídají měsícům roku 2011, sloupce 1-12 měsíčním zpožděním, 13. sloupec charakterizuje váznoucí pohledávky přesahující hranici trpělivosti věřitele, která byla stanovena na 390 dní, a 14. sloupec ukazuje příslušné váznoucí pohledávky, které byly však splaceny. Přeměťkování finančních objemů pomocí  $10^5$  Kč bylo zvoleno v konkrétním případě ryze prakticky, neboť oba spočtené grafy tak mají formálně podobná vertikální měřítka.

#### **1. PODNIK KATEGORIE MSP V ZÁPADOČESKÉM KRAJI – NESPLACENÉ POHLEDÁVKY – PŘÍPADOVÁ STUDIE – ROK 2011**

Jak bylo již uvedeno v předchozím odstavci, pro případovou studii jsme zvolili podnik kategorie MSP v Západočeském kraji. Vzhledem k citlivosti finančních údajů, a také proto, že příspěvek je zaměřen na metodickou část aplikace aparátu absorpčních MŘ na analýzu

nesplacených pohledávek zachováme anonymitu příslušného podniku. Navíc se ukazuje, že takový přístup pak umožňuje celkem lehce vedle skutečných počtů, ale především finančních objemů váznoucích pohledávek uvažovat i alternativní, či modelové objemy.

Struktura submatice  $Q$  je obecně, vzhledem k nevratnosti času, jednoduchá. Jediné nenulové prvky jsou na první horní vedlejší diagonále, tzn.  $p_{i,i+1}$ , které vyjadřují přechod z  $i$ -tého stavu, tedy  $i$ -tého měsíce, do bezprostředně následujícího – vyjadřují tedy „stárnutí“ váznoucí pohledávky. Naopak komplementární podmíněná pravděpodobnost  $1-p_{i,i+1}$  vyjadřuje míru, že váznoucí pohledávka v  $i$ -tém měsíci po termínu splatnosti bude splacena, a figuruje v  $i$ -tém řádku a prvním sloupci submatice  $R$ .

K výpočtu těchto podmíněných pravděpodobností jsme využili zprůměrovaných hodnot z těch, které jsou na Obr. 1. Uvažujeme tedy průměrné počty i finanční objemy váznoucích pohledávek v jednotlivých transientních stavech, kterých je celkem 13.

Z posledního transientního stavu, který tak představuje trpělivost věřitele, je možný přechod již jen do absorpčních stavů, a to  $q$  do nesplacených pohledávek, zatímco  $1-q$  do splacených. Numerické hodnoty složek prvních sloupců submatic  $R$ , zde

**Tab. 1: Hodnoty podmíněných pravděpodobností splacení váznoucích pohledávek v r. 2011**

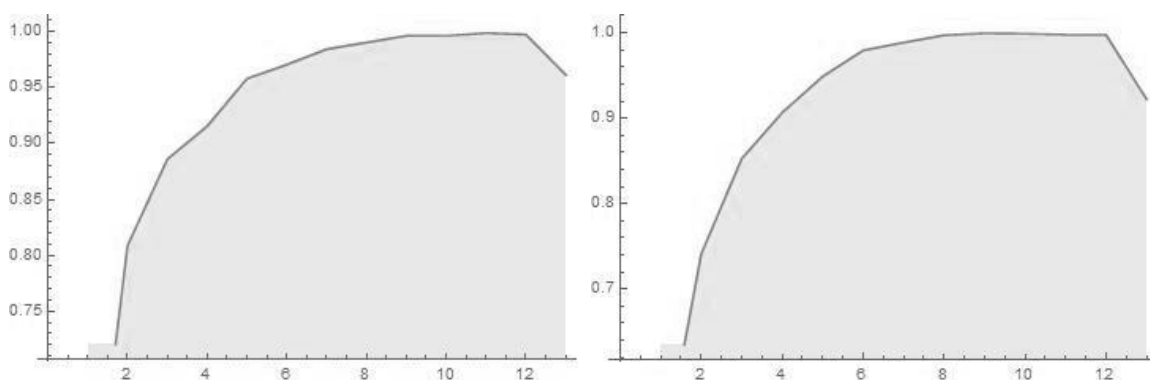
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$
$R_n$	.5143	.8086	.8860	.9156	.9581	.9706	.9844	.9904	.9964	.9964	.9988	.9976	.9615
$R_f$	.4865	.7411	.8528	.9067	.9490	.9794	.9887	.9972	.9996	.9991	.9979	.9976	.9224

*Zdroj: vlastní výpočet*

označených  $R_n$ , respektive  $R_f$ , neboť je počítáme buď z počtů váznoucích pohledávek,

anebo jejich finančních objemů, jsou uvedeny v Tab. 1. Jejich grafické vyjádření je na Obr. 2.

**Obr. 2: Podmíněné pravděpodobnosti splacení váznoucích pohledávek v r. 2011**



*Zdroj: vlastní výpočet*

Na Obr. 2 vlevo jsou hodnoty počítané z průměrných počtů pohledávek, tedy složky prvního sloupce submatic  $R_n$ , zatímco vpravo jsou složky prvního sloupce submatic  $R_f$ , tj. stejné podmíněné pravděpodobnosti přechodů ale počítané z průměrných finančních objemů váznoucích pohledávek. Srovnáním hodnot jak v Tab. 1 tak i na Obr. 2 lze konstatovat, že vzájemné odchylky jsou velmi malé. Při všech těchto výpočtech byly zároveň použity i průměrné hodnoty jak počtu, tak i finančního objemu splacených pohledávek nacházejících se v  $i$ -tém transientním stavu váznoucích pohledávek, tj. v  $i$ -tém měsíci po termínu splatnosti.

Z  $D_1$  lze též sestavit složky vektoru  $t$ , který pomocí (4) umožňuje spočítat vektor  $y$ , který představuje kýžený výsledek celé analýzy

pomocí absorpčních MŘ. Vzhledem k tomu, že můžeme analyzovat jak počty nesplacených pohledávek, tak i jejich finanční objemy, tak bychom, podobně jako u submatic  $R$ , měli obecně uvažovat vektory  $t_n$  a  $t_f$ , tedy přesně řečeno – vektor počtu váznoucích pohledávek v uvažovaných transientních stavech, respektive vektor finančních objemů váznoucích pohledávek v těchto stavech. V praxi samozřejmě mnohem důležitější roli hrají finanční objemy nežli samotné počty váznoucích pohledávek. Proto se soustředíme jen na  $t_f$ , a dále tento vektor budeme jednoduše označovat jen  $t$ .

Složky vektoru  $t$  spočteme opět jako průměrné finanční objemy váznoucích pohledávek v příslušných transientních stavech. Vzhledem však k evidentní citlivosti takových dat,

a zároveň s ohledem na snahu získat jednoduše, nejlépe přímo v procentech, vyjádřené odhady splacených a nesplacených pohledávek, tj. očekávaných finančních objemů v absorpčních stavech příslušného MŘ zvolíme

pro naše výpočty vektor  $\mathbf{t}$  tak, že  $\sum_{i=1}^{13} t_i = 100 \times 10^5$  Kč, takže i stejný objem bude celkově distribuován do příslušných dvou absorpčních stavů – tedy splacených a nesplacených pohledávek.

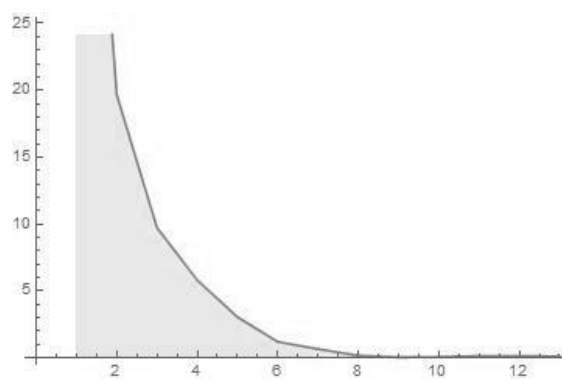
**Tab. 2: Průměrné hodnoty finančních objemů v transienčních stavech – v měřítku  $10^5$  Kč**

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$	$s_{10}$	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$
$\mathbf{t}$	59.41	19.66	9.716	5.792	3.027	1.181	.6492	.1559	.0236	.0505	.1212	.1358	.0828

Zdroj: vlastní výpočet

Numerické hodnoty složek vektoru  $\mathbf{t}$  jsou v Tab. 2, a jejich rozdělení je graficky znázorněno na Obr. 3.

**Obr. 3: Rozdělení průměrných hodnot finančních objemů v transienčních stavech ( $\times 10^5$  Kč)**



Zdroj: vlastní výpočet

Z Tab. 2 i Obr. 3 je patrné, že průměrné finanční objemy váznoucích pohledávek v transienčních stavech velmi rychle klesají. Ostatně to plně koresponduje i s hodnotami na Obr. 1, kde jsou zachyceny i drobné odchylky v hodnotách příslušející jednotlivým měsícům roku 2011. Samozřejmě, že by bylo možné, a při dalších aplikacích jistě i záhodné, mít k dispozici delší časové řady, tzn. větší problémově-orientovanou databázi  $D_1$ .

Nyní již lze provést všechny výpočty, jejichž cílem je určení vektoru  $\mathbf{y}$ . Jádro příslušného algoritmu, který byl naprogramován v sw Mathematica, obsahuje vlastně jen tři hlavní kroky

- 1) Sestavit z dat  $D_1$  submatice  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$ , tzn. vyčíslit podmíněné pravděpodobnosti  $p_{i,i+1}$ , resp.  $1-p_{i,i+1}$  pro  $i=1, \dots, 12$  a pro  $i=13$  spočítat podmíněné pravděpodobnosti  $q$ , resp.  $1-q$ .
- 2) Sestavit matici  $\mathbf{I}-\mathbf{Q}$  rozměru  $13 \times 13$ , provést její inverzi, tzn. spočítat  $(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$ , a tak podle

(3) dostat fundamentální matici  $\mathbf{N}$  příslušného MŘ, kterým analyzujeme proces splácení váznoucích pohledávek podniku.

- 3) Sestavit vektor  $\mathbf{t}$ , opět s využitím  $D_1$ , který obsahuje 13 složek, a pomocí (4) spočítat vektor  $\mathbf{y}$ , který má jen 2 složky, zato však nadmíru kýžené, neboť obsahují odhady splacených a konečně nesplacených váznoucích pohledávek při vyčerpání stanovené trpělivosti podniku jako věřitele vůči dlužníkům s váznoucími pohledávkami.

Když jsme uvažovali dvě submatice  $\mathbf{R}_n$  a  $\mathbf{R}_f$ , sestavené z  $D_1$  buď podle počtu váznoucích pohledávek, nebo podle jejich finančních objemů, musíme uvažovat i dvě submatice  $\mathbf{Q}$ , tedy  $\mathbf{Q}_n$  a  $\mathbf{Q}_f$ , a tím pádem dostaneme i dvě fundamentální matice  $\mathbf{N}_n$  a  $\mathbf{N}_f$ . Když provedeme všechny výpočty, získáme očekávané finanční objemy v absorpčních stavech, které jsou uvedeny v Tab. 3.

**Tab. 3: Očekávané finanční objemy v absorpčních stavech – v měřítku  $10^5$  Kč**

	splacené pohledávky	nesplacené pohledávky
$y_n$	99.725	0.275
$y_f$	99.445	0.555

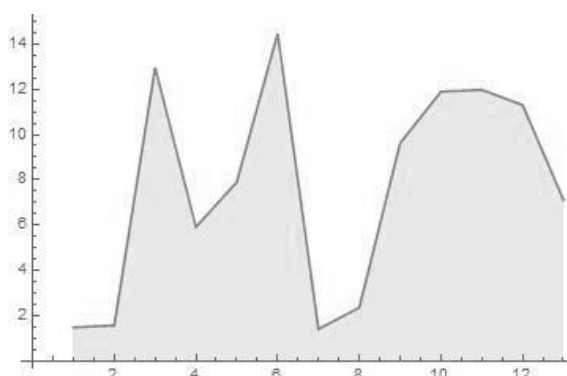
Zdroj: vlastní výpočet

Tyto hodnoty ukazují, že podnik se stanovenou hranicí trpělivosti 390 dní a procesem vymáhání váznoucích pohledávek, který je vlastně popsán z podnikových účetních dat sestavenou problémově-orientovanou databází  $D_1$ , může očekávat finanční ztráty z nedobytných pohledávek kolem poloviny procenta či dokonce méně váznoucích finančních objemů. Což je jistě velmi povzbudivý výsledek.

Pro další analýzu se nabízejí dva směry, jednak uvažovat jiná rozdělení finančních objemů

v transientních stavech, nebo podrobněji sledovat proces zkracování trpělivosti podniku jako věřitele.

Pro ilustraci prvního směru jsme vygenerovali pomocí generátoru pseudo-náhodných čísel možné složky vektoru  $\mathbf{t}$ , které splňují podmínku, že celkový objem je  $100 \times 10^5$  Kč, avšak jeho rozdělení, které je na Obr. 4 je podstatně jiné než na Obr. 3.

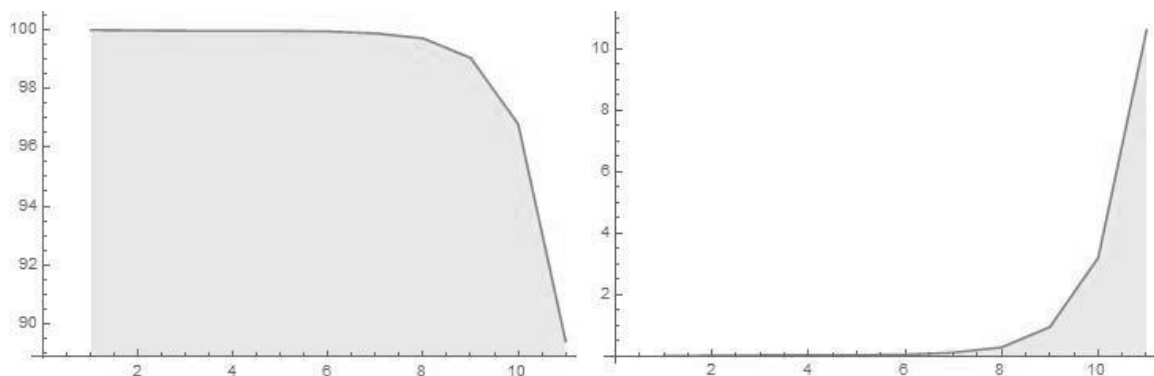
**Obr. 4: Rozdělení možných hodnot finančních objemů v transientních stavech ( $\times 10^5$  Kč)**

Zdroj: vlastní výpočet

Přitažlivější se nám zdá analýza trpělivosti věřitele, a její vliv na očekávané finanční objemy v absorpčních stavech – tedy jinak řečeno, nakolik ovlivní zkrácení trpělivosti velikost očekávaných finančních ztrát z nedobytných pohledávek. Samozřejmě, že v této analýze, která je postavena na využívání aparátu absorpčních MŘ neuvažujeme žádné náklady spojené s vymáháním váznoucích pohledávek, které přirozeně budou podstatně růst s delší trpělivostí, tedy delším procesem vymáhání váznoucích pohledávek. Ve světle takových úvah, pak onen velmi povzbudivý

výsledek může značně poblednout, neboť se k němu budou muset k tíži připočítat právě uvedené náklady na vymáhání.

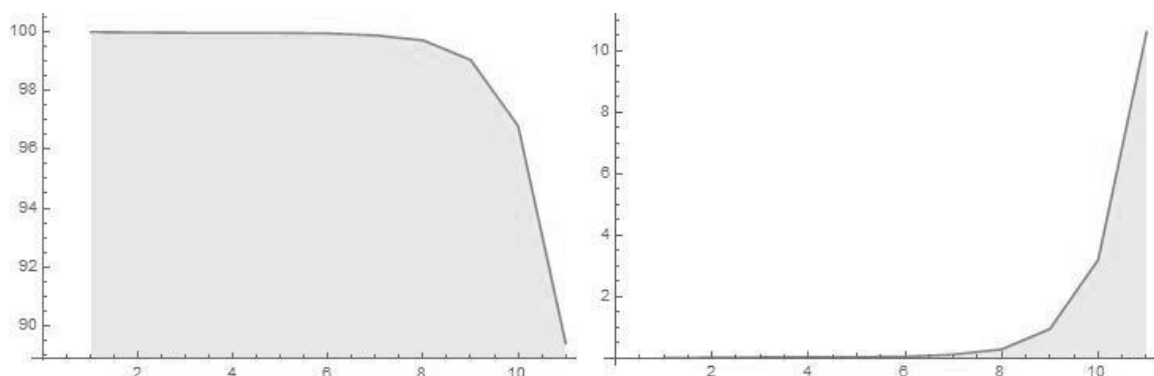
Jádrem pro provedení výpočtů k analýze trpělivosti podniku-věřitele zůstává dříve uvedený algoritmus. Pracujeme i se stejnou databází  $D_1$ , avšak mění se její zpracování, a to od původní trpělivosti 390 dní, což je  $13\Delta$ , když pracujeme se zvolenou časovou charakteristikou jednoho transientního stavu  $\Delta=30$ , až na 90 dní, tedy  $3\Delta$ . Výsledky jsou na Obr. 5.

**Obr. 5: Očekávané splacené pohledávky (vlevo), nesplacené pohledávky (vpravo), ( $\times 10^5$  Kč)**

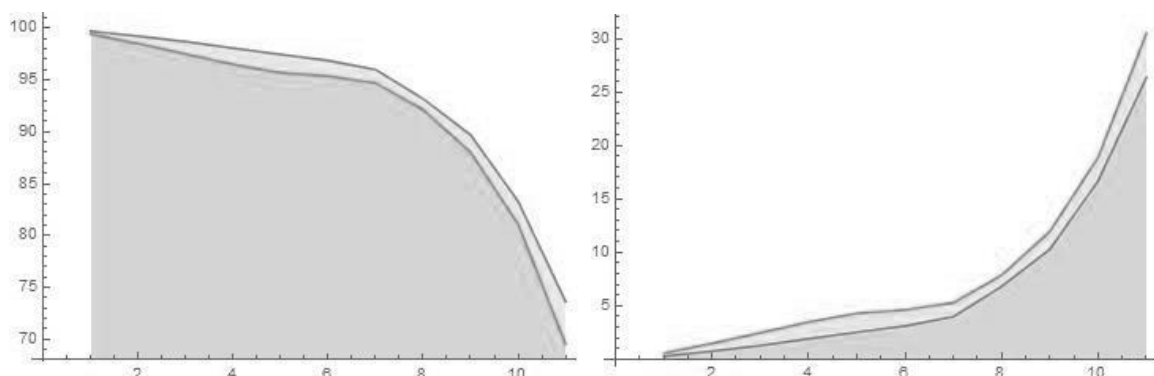
Zdroj:vlastní výpočet

Na horizontální ose udávají celá čísla délky intervalů trpělivosti, 1 ~  $13\Delta=390$  dní, 2 ~  $12\Delta=360$  dní, ..., 11 ~  $3\Delta=90$  dní. Na vertikální ose jsou očekávané finanční objemy v absorpčních stavech – vlevo, splacené váznoucích pohledávky, vpravo nesplacené, tj. ty které se staly nedobytnými, a to v závislosti na délce intervalu trpělivosti se splácením

váznoucích pohledávek dlužníků. Výsledky jsou vyneseny opět s měřítkem  $10^5$  Kč, takže umožňují snadnou orientaci a interpretaci výsledků v procentech. Vidíme, že podstatnému nárůstu očekávaných finančních ztrát dochází až při zkrácení na čtyři, či jen tři násobky  $\Delta$ , tj. pro poměrně velmi krátké trpělivosti, konkrétně 120, respektive dokonce jen 90 dní.

**Obr. 6: Očekávané splacené pohledávky (vlevo), nesplacené pohledávky (vpravo), ( $\times 10^5$  Kč)**

Zdroj:vlastní výpočet

**Obr. 7: Očekávané splacené (vlevo) a nesplacené pohledávky (vpravo), ( $\times 10^5$  Kč) – data z Obr. 4**

Zdroj:vlastní výpočet

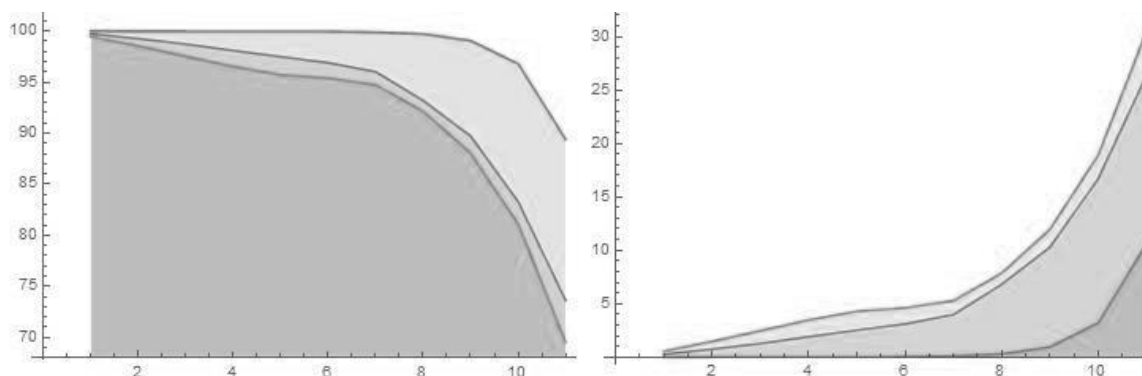
Vytvořený program v sw Mathematica pro analýzu nesplacených pohledávek pomocí absorpčních MŘ lze, jak vidno, použít v různých směrech. Na Obr. 7 jsou výsledky analýzy netrpělivosti provedené s procesem splácení váznoucích pohledávek modelovaným absorpčním MŘ se submaticemi  $Q_n$  a  $Q_f$  sestavenými podle údajů z  $D_1$ , avšak s uvažováním možného rozdělení finančních objemů v transienčních stavech podle dat zobrazených na Obr. 4. Modře jsou výsledky spočtené s fundamentální maticí  $N_n$ , a špinavě žlutou jsou výsledky s  $N_f$ . Vidíme, že výsledky se navzájem mírně odlišují, a to tak, že hodnoty spočtené pomocí  $N_f$  jsou mírně pesimističtější vzhledem k očekávaným finančním objemům splacených pohledávek.

Vliv odlišného zadaného rozdělení finančních objemů v absorpčních stavech se také projevil,

a to tak, že dochází k pozorovatelnému, byť nejdříve mírnému, poklesu v očekávaných finančních objemech splacených pohledávek, a to počítaných jak s  $N_n$  tak i  $N_f$ , již při zkrácení intervalu trpělivosti z původních  $13\Delta=390$  dní. Progresivnější pokles pak nastává od intervalu trpělivosti  $7\Delta=210$  dní, tedy sedmi měsíců. Tento efekt lze samozřejmě vidět i při sledování objemu nesplacených pohledávek, tedy hodnot v pravé části Obr. 7.

Závěrem ukážeme ještě na Obr. 8 shrnutí předchozích výsledků, a tak jednotně pohledět jak na výsledky analýzy trpělivosti při zkracování intervalu trpělivosti, tak i na případné vlivy různých rozdělení průměrných finančních objemů v transienčních stavech, které při této analýze zadáváme.

**Obr. 8: Srovnání očekávaných splacených a nesplacených pohledávek, ( $\times 10^5$  Kč) – varianty**



*Zdroj:vlastní výpočet*

Modře a špinavě žlutě jsou uvedeny výsledky spočtené pomocí fundamentálních matic  $N_n$ , respektive  $N_f$  se zadanými hodnotami průměrných finančních objemů v transienčních stavech uvedenými na Obr. 4. Zeleně jsou vyneseny výsledky spočtené pomocí  $N_f$  s hodnotami složek vektoru  $t$  z Tab. 2. Na levé straně Obr. 8 vlevo, vidíme srovnání všech provedených variant výpočtů z pohledu očekávaných splacených pohledávek při zkracování intervalu trpělivosti z 390 dní až na 90 dní. Na pravé straně jsou pak uvedeny příslušné očekávané finanční objemy nesplacených pohledávek, které se pro podnik staly nedobytnými a představují finanční ztráty. Vztah těchto spočtených výsledků je vzájemně

komplementární v tom smyslu, že jejich vždy odpovídající součet dá  $100 \times 10^5$  Kč, což byl také celkový finanční objem váznoucích pohledávek v transienčních stavech, které můžeme sledovat na základě účetních dat podniku.

## ZÁVĚR

Příspěvek je věnován použití absorpčních MŘ k analýze splacených a nesplacených pohledávek z množiny váznoucích pohledávek po termínu jejich splatnosti u vybraného podniku ze Západočeského kraje, který patří do kategorie MSP. Analýza byla provedena na základě dat získaných z účetních dokladů podniku za rok 2011. Z těchto dat byla vhodnou



filtrací sestavena problémově-orientovaná databáze, pomocí které byly pak sestrojeny potřebné matice podmíněných pravděpodobností přechodů. Další postup se opíral o výpočet fundamentální matice příslušného absorpčního MŘ, pomocí kterého byl celý proces splácení váznoucích pohledávek v podniku modelován. Vstupní data umožnily pracovat se dvěma fundamentálními maticemi podle orientace na počty či finanční objemy váznoucích pohledávek. Hlavním přínosem příspěvku je analýza závislosti očekávaných finančních ztrát z nesplacených pohledávek, které se staly nedobytnými po překročení meze trpělivosti se splácením váznoucích pohledávek po jejich době splatnosti. Všechny výpočty byly provedeny vlastním programem sestaveným pomocí sw Mathematica. V další etapě výzkumu se chceme věnovat jednak dalším variantám algoritmu sestavení matice podmíněných pravděpodobností přechodů, a též analýze citlivosti objemů nesplacených pohledávek na parametrech procesu splácení.

Příspěvek je jedním z výstupů projektu SGS-2014-047 „Kvantitativní modelování a experimenty pro ekonomii a podnikovou ekonomiku“ řešeného na Fakultě ekonomické Západočeské univerzity v Plzni, jehož poskytovatelem je ZČU v Plzni.

## LITERATURA

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (1988). *An Introduction to Management Science – Quantitative Approaches to Decision Making* (5th ed.). (s. 688-693). Minnesota: St. Paul West Publ. Co.

Garmichael, D. G., & Balatbat, M. C. A. (2010). A contractor's analysis of the likelihood payment of claims. *Journal of Financial Management of Property and Construction*. 15(2), 102-117.

Hofman, J., & Lukáš, L. (2014). Markov chain model used for sensitivity analysis of paid/unpaid claims in after-payment-due process. *32-th Int.Conf. Mathematical Methods in Economics – Proceedings – Part I* (299-304). Olomouc: Palackého Univerzita.

Lukáš, L. (2009). *Pravděpodobnostní modely v managementu – Markovovy řetězce a systémy hromadné obsluhy*. Praha: ACADEMIA.

Render, B., Stair, M. R. Jr., & Hanna, M. E. (2003). *Quantitative Analysis for Management* (8th ed.). (s. 655-659). New Jersey: Upper Saddle River: Pearson Education, Prentice Hall.

Sopranzetti, B. J. (1999). Selling accounts receivable and the underinvestment problem. *The Quarterly Review of Economics and Finance*. 39(2), 291-301.

Yin, G., & Zhang, Q. (2005). *Discrete-time Markov Chains*. New York: Springer.

### Adresy autorů:

**Doc.RNDr.Ing. Ladislav Lukáš,CSc.**

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta ekonomická

Katedra ekonomie a kvantitativních metod

lukasl@kem.zcu.cz

### Dr.Ing. Jiří Hofman

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta ekonomická

Katedra podnikové ekonomiky a managementu

hofman@kpm.zcu.cz

## OUTSTANDING ACCOUNTS RECEIVABLE ANALYSIS USING MARKOV CHAINS – CASE STUDY

Ladislav Lukáš, Jiří Hofman

**Abstract:** The paper uses existing Markov chain theory to analyze problem of claim payment delayed process, which serves to estimate a distribution of paid/unpaid claims after payment due. Payment condition patterns and timing of claim payments play significant role in financial management. First, the corresponding data reported in usual accounting reports are extracted to yield records of delayed payment structures. Data processing procedure issues estimations of transitions probabilities of absorption Markov chain with several transition states and two absorption ones representing paid and unpaid claims, respectively. Fundamental matrix of absorption Markov chain is calculated by matrix inversion operation and used for averaged paid/unpaid claims estimation provided a vector of pending payments distributed in transient states is given. The goal of procedure is to determine bad debt losses expected after accounts receivable are arranged by aging schedule and the payment time forbearance is given. All these calculations are illustrated on the case study analyzing after-payment-due process of accounts receivable in selected SME company from West Bohemia region. The main contribution of the paper is dependence investigation of amount of receivables and expected losses from uncollectible accounts upon variable payment time forbearance defined prospectively by financial management of the company. All computations and graphical issues are performed by own code developed using sw Mathematica.

**Key words:** Absorption Markov chain, Accounts receivable analysis, Outstanding accounts, Paid/unpaid claims, Fundamental matrix

**JEL Classification:** C65, G35